Mit gebrochenen Funktionen abbilden.

Eine Übersicht über die verschiedenen Methoden steht im Text 50022

Hier eine Beispielsammlung

Es wird dringend empfohlen, zuvor
diese beiden Texte zu lesen:

50035 Komplexe Geradengleichungen

50036 Komplexe Kreisgleichungen

Dieser Text setzt diese Gleichungsformen voraus.

Datei Nr. 50024

Stand 24. November 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik
und Studium

https://mathe-cd.de

Inhalt

Aufgabe 1

Gegeben ist die komplexe Abbildung $w = f(z) = \frac{1+z}{i-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$

a) Berechnen Sie die Bilder einiger Punkte des Einheitskreises.
Zeichnen Sie Urbilder und Bilder. Was könnte das Bild des Kreises sein?

b) Berechnen Sie die Gleichung der Bildkurve des Einheitskreises.

Lösung:

a) Berechnen Sie die Bilder einiger Punkte des Einheitskreises.
Zeichnen Sie Urbilder und Bilder. Was könnte das Bild des Kreises sein?

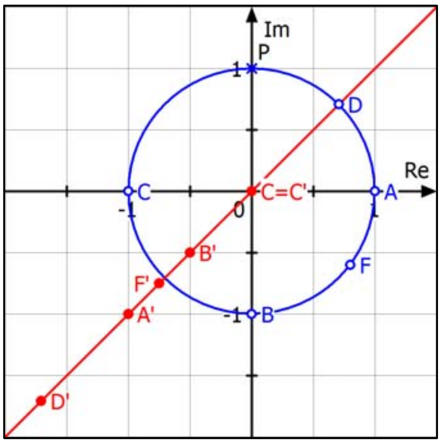
$A(1|0) \xrightarrow{f} A'(-1|-1)$ denn $f(1) = \frac{2}{i-1} = \frac{2}{i-1} \cdot \frac{i+1}{i+1} = \frac{2+2i}{-1-1} = \frac{2+2i}{-2} = -1-i$

$B(0|-1) \xrightarrow{f} B'\left(-\tfrac{1}{2}|-\tfrac{1}{2}\right)$ denn $f(-i) = \frac{1-i}{i+i} = \frac{1-i}{2i} = \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i+1}{2i^2} = \frac{i+1}{-2} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}$

$C(-1|0) \xrightarrow{f} C'(0|0)$ denn $f(-1) = \frac{1-1}{i-1} = 0$

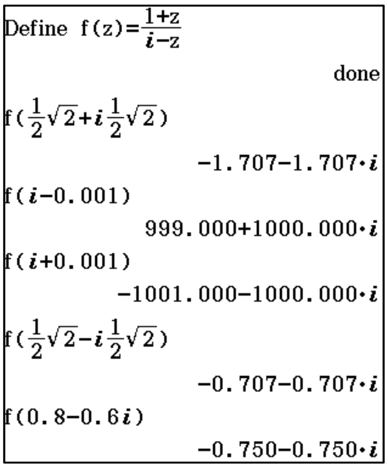
$D\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,|\,\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \xrightarrow{f} D' \approx (-1{,}707\,|\,-1{,}707)$

denn $f\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \ldots = -\left(1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)(1+i) \approx -1{,}707 - 1{,}707\,i$



Beobachtung:
Die Bildpunkte dieser vier Kreispunkte liegen auf der Geraden $v = u$ in der w-Ebene. In der Abbildung sind die z-Ebene und die w-Ebene aufeinandergelegt. Um die Reihenfolge der Bildpunkte zu verstehen gehe ich „experimentell“ vor.

Die Zahl z = i, d. h. der Punkt $P(0|1)$ hat keinen Bildpunkt, weil der Nenner 0 ergibt. Nun verwende ich meinen CAS-Rechner, und definiere die Funktion f. Dann habe ich mir die Berechnung des Bildpunktes von D erspart und mit den Rechner arbeiten lassen. Wenn ich mich auf dem Kreis bewege, und zwar von D über A,B nach C im Uhrzeigersinn, dann wandern die Bildpunkte D', A', B', C' auf der Geraden nach schräg oben. Wenn ich mich dem Punkt $P(0|1)$ nähere, gibt es keinen Bildpunkt mehr. Für $z \to i$ von links gleitet der Bildpunkt ins Unendliche (oben rechts)? Mein Rechner bestätigt dies durch die Berechnung $f(i-0{,}001)$ (siehe Screenshot). Wenn ich diese Stelle überspringe und rechts von P auf der Kreislinie weitergleite, dann kommt der Bildpunkt aus dem Unendlichen von links unten, siehe $f(i+0{,}001)$, er erreicht dann D'. Dann gleitet er weiter in einer Aufwärtsbewegung. Ein Kreisumlauf von P im Uhrzeigersinn um 360° ergibt auf der Bildgeraden einen Durchlauf der Geraden schräg aufwärts.



b) Berechnen Sie die Gleichung der Bildkurve des Einheitskreises.

Methode der Lösung:

Der Einheitskreis hat den Mittelpunkt $m = 0 + 0i \triangleq M(0\,|\,0)$. Sein Radius ist 1.

Folgende Kreisgleichungen sind möglich:

$x^2 + y^2 = 1$ bzw. $z \cdot \bar{z} = 1$ oder $|z| = 1$

Damit man aus der z-Gleichung eine w-Gleichung (für die Bildkurve) bilden kann, muss man die Abbildungsgleichung nach nach z = umstellen, dann kann man einsetzen.

Lösung:

Gegeben ist die Abbildungsfunktion f: $z \;\to\; w = \dfrac{1+z}{i-z}$

Die Umkehrfunktion entsteht, indem man nach z umstellt:

Zuerst wird die Umkehrfunktion (zum Einsetzen) berechnet:

$$w = \frac{1+z}{i-z} \;\Leftrightarrow\; (i-z)w = 1+z \;\Leftrightarrow\; iw - 1 = z + zw \;\Leftrightarrow\; z(1+w) = iw - 1 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{iw-1}{1+w}$$

Zum Einsetzen benötigt man noch: $\bar{z} = \dfrac{-i \cdot \bar{w} - 1}{1+\bar{w}}$.

Für den Einheitskreis wähle ich die Gleichung $z\bar{z} = 1$

Jetzt folgt der Abbildungsschritt indem man z und $\bar{z}$ ersetzt:

$$\frac{iw-1}{1+w} \cdot \frac{i(-\bar{w})-1}{1+\bar{w}} = 1$$

$$(iw-1)(-i\bar{w}-1) = (1+w)(1+\bar{w})$$

$$\cancel{w\bar{w}} - iw + i\bar{w} + 1 = 1 + w + \bar{w} + \cancel{w\bar{w}}$$

$$-i(u+iv) + i(u-iv) = u + iv + u - iv$$

$$\cancel{-iu} + v + \cancel{iu} + v = 2u$$

Ergebnis: $v = u$

Diese Gleichung gehört zur 1. Winkelhalbierenden in der w-Ebene.
Siehe Abbildung auf der Seite zuvor.

Aufgabe 2

Gegeben ist die komplexe Abbildung $w = f(z) = \frac{2i \cdot z - 2}{z^2}$ mit $z \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie das Bild der positiven reellen Achse.
Geben Sie die Gleichung, die Art und die Eigenschaften der Bildkurve in der w-Ebene an.

b) Bestimmen Sie das Bild der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.
Geben Sie die Gleichung, die Art und die Eigenschaften der Bildkurve in der w-Ebene an

Lösungsmethode für a)

Die positive reelle Achse hat die Gleichung y = 0 mit x >0. Zur Abbildung der Halbgeraden stellt man die Abbildungsgleichung als Gleichungssystem für u und v in Abhängigkeit von x und x dar. Dann ersetzt man y durch 0 und eliminiert x:

Lösung: **Auf CD….**